TOPOLOGIK FAZOLARNING KOMPAKTIFIKATSIYASI

Hoshimova Dilobar Ko‘chkarovna

SHDPI Aniq fanlar oliy pedagogika maktabi, Matematika va ta’limda axborot texnologiyasi kafederasi

O‘rinova Aziza Husan qizi

SHDPI Aniq fanlar oliy pedagogika maktabi, “Matematika” 2-bosqich talabasi

E-mail: orinovaa57@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada umumiy topologiyaning muhim tushunchalaridan biri — topologik fazolarning kompaktifikatsiyasi nazariyasi tahlil qilingan. Kompakt bo‘lmagan topologik fazolarni kompakt fazolarga hamma joyda zich qismfazo sifatida gomeomorf joylashtirish usullari ko‘rib chiqilgan. Xususan, lokal kompakt Xausdorf fazolar uchun bir nuqtali Aleksandrov kompaktifikatsiyasi hamda Tixonov fazolari uchun Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasining qurilish algoritmlari va ularning asosiy topologik xossalari yoritilgan. Shuningdek, berilgan fazoning turli kompaktifikatsiyalari to‘plamida qisman tartib munosabati o‘rganilib, Aleksandrov va Stoyn–Chex kompaktifikatsiyalarining ekstremal (eng kichik va eng katta) xususiyatlari qiyosiy tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar: topologik fazo, kompaktlik, kompaktifikatsiya, Aleksandrov kompaktifikatsiyasi, Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasi, Tixonov fazosi, Xausdorf fazosi, gomeomorfizm.

Аннотация. В данной статье анализируется теория компактификации топологических пространств — одно из важнейших понятий общей топологии. Рассмотрены методы гомеоморфного вложения некомпактных топологических пространств в компактные пространства в качестве всюду плотного подпространства. В частности, освещены алгоритмы построения одноточечной компактификации Александрова для локально компактных хаусдорфовых пространств и компактификации Стоуна–Чеха для тихоновских пространств, а также их основные топологические свойства. Кроме того, изучено отношение частичного порядка на множестве различных компактификаций заданного пространства и проведен

сравнительный анализ экстремальных (наименьшего и наибольшего) свойств компактификаций Александрова и Стоуна–Чеха.

Ключевые слова: топологическое пространство, компактность, компактификация, компактификация Александрова, компактификация Стоуна–Чеха, тихоновское пространство, хаусдорфово пространство, гомеоморфизм.

Abstract. This article analyzes the theory of compactification of topological spaces, which is one of the fundamental concepts of general topology. Methods for homeomorphically embedding non-compact topological spaces into compact spaces as everywhere dense subspaces are examined. In particular, the construction algorithms and main topological properties of the one-point Alexandroff compactification for locally compact Hausdorff spaces and the Stone–Čech compactification for Tychonoff spaces are highlighted. Furthermore, the partial order relation on the set of various compactifications of a given space is studied, and a comparative analysis of the extremal (smallest and largest) properties of the Alexandroff and Stone–Čech compactifications is carried out.

Keywords: topological space, compactness, compactification, Alexandroff compactification, Stone–Čech compactification, Tychonoff space, Hausdorff space, homeomorphism.

Kirish

Umumiy topologiya va funksional analizning markaziy tushunchalaridan biri — bu kompaktlik xossasidir. Kompakt topologik fazolar o‘zining bir qator muhim va qulay xususiyatlari bilan ajralib turadi: bunday fazolarda aniqlangan har qanday uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiya chegaralangan bo‘ladi hamda o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi (Veyershtrass teoremasi), kompakt Xausdorf fazolar esa normal fazo bo‘lib, ularda yaqinlashish jarayonlari ancha barqaror kechadi. Biroq matematika va uning tatbiqlarida uchraydigan ko‘plab fundamental fazolar — masalan, n-o‘lchovli Yevklid fazosi R^n ochiq intervallar yoki cheksiz o‘lchovli Banax fazolari kompakt emas.

Kompakt bo‘lmagan fazolarni o‘rganishda ularni ma’lum bir kompakt fazolarning qismfazosi sifatida tasavvur qilish va shu orqali kompakt fazolarning kuchli apparatidan foydalanish ehtiyoji yuzaga keladi. Ushbu g‘oya **topologik fazolarning**

kompaktifikatsiyasi (kompakt kengaytmasi) nazariyasining asosini tashkil etadi. Kompaktifikatsiya deganda berilgan (X,τ) topologik fazoni biror $(Y,\sigma$)kompakt fazoga hamma joyda zich qismfazo sifatida gomeomorf joylashtirish tushuniladi. Bunda dastlabki X fazo o‘zining topologik strukturasini to‘liq saqlab qolgan holda Y kompakt fazosining "deyarli barcha" qismini tashkil etadi, (Y/X) qoldiq to‘plam esa fazoning "cheksizlikdagi" xulq-atvorini tavsiflaydi.

Mazkur tadqiqotning asosiy maqsadi topologik fazolarni kompaktifikatsiya qilishning klassik usullarini tizimli tahlil qilish, ularning mavjudlik shartlarini aniqlash hamda turli kompaktifikatsiyalar orasidagi o‘zaro munosabatlarni yoritishdan iborat. Maqolada bir nuqtali Aleksandrov kompaktifikatsiyasi va universal xossaga ega Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasining qurilish mexanizmlari ko‘rib chiqilib, ularning topologik xossalari qiyosiy o‘rganiladi.

1. Kompaktifikatsiya tushunchasi va ekvivalentlik munosabati

Topologik fazolarni kompakt fazolarga kengaytirish masalasini qat’iy matematik tilda bayon qilish uchun avvalo asosiy ta’riflarni kiritamiz.

1.1-ta’rif. Faraz qilaylik, (X,τ) — ixtiyoriy topologik fazo bo‘lsin. Agar (Y,σ)kompakt topologik fazo va $C: X \to Y$ akslantirish quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa:

C akslantirish X fazodan uning $c(X)\subset$ Y

1. obraziga (induksiyalangan topologiya bilan) gomeomorfizm bo‘lsa;

– $c(X)$ to‘plam Y fazoda hamma joyda zich bo‘lsa, ya’ni $c(X) = Y$ tenglik o‘rinli bo‘lsa,

u holda (Y,c) juftlik X fazoning **kompaktifikatsiyasi** deyiladi.

Soddalik uchun ko‘pincha X ni $c(X)$ bilan aynanlashtirib, $X\subset$ Y

deb qaraladi. Bunda Y/X ayirma kompaktifikatsiyaning *qoldig‘i* (yoki cheksizlikdagi nuqtalar to‘plami) deb yuritiladi.

1.2-ta’rif. X fazoning ikkita $(Y_1c_{1)})va(Y_2c_2)$ kompaktifikatsiyalari **ekvivalent** deyiladi, agar shunday $h: Y_1 \to Y_2$ gomeomorfizm mavjud bo‘lsaki, barcha $x \in X$ lar uchun $h(c_1(x) = c_2(x)$ shart bajarilsa.

Kompaktifikatsiya nazariyasida asosiy e’tibor **Xausdorf T_2 kompaktifikatsiyalariga** qaratiladi, chunki Xausdorf fazolarda ketma-ketlik yoki yo‘nalishlarning limiti yagona bo‘lib, ko‘plab analitik xossalar saqlanib qoladi.

2. Bir nuqtali (Aleksandrov) kompaktifikatsiyasi

Kompakt bo‘lmagan fazoni kompaktlashtirishning eng minimal usuli — unga bitta "cheksizlik" nuqtasini qo‘shishdir.

2.1-teorema (Aleksandrov teoremasi). *Faraz qilaylik, (X, τ) — kompakt bo‘lmagan topologik fazo bo‘lsin. U holda X fazoning Xausdorf bir nuqtali kompaktifikatsiyasi $X^* = X \cup \infty$ mavjud bo‘lishi uchun X ning lokal kompakt Xausdorf fazo bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bundan tashqari, bunday kompaktifikatsiya ekvivalentlik aniqligida yagonadir.*

Isboti.

Qurilishi: X to‘plamga unga kirmaydigan bitta ∞ elementini qo‘shib, $X^* = X \cup \infty$ to‘plamni hosil qilamiz. X^* da Y^* topologiyani quyidagi to‘plamlar sistemasi orqali aniqlaymiz:

$\tau^* = \tau \cup \{X^* \backslash K | \, K \subset X\}$ — kompakt va yopiq toplam}

To‘plamlar nazariyasi qoidalariga ko‘ra τ^* ning topologiya aksiomalarini (bo’sh to‘plam va X^* ning tegishliligi, chekli kesishma va ixtiyoriy birlashmaga nisbatan yopiqlik) qanoatlantirishi bevosita tekshiriladi.

Kompaktlik: X^* ning ixtiyoriy $\{U_{\alpha\alpha\in\beta}\}$ ochiq qoplamasini olaylik. $\infty \in U_{\alpha 0}$ bo‘ladigan biror $\alpha_0 \in A$ mavjud. Ta’rifga ko‘ra $U_{\alpha 0} = X^* \backslash K$ bu yerda $K \subset X$ kompakt to‘plam. Qolgan $\{U_\alpha \cap X_{\alpha\neq\alpha 0}\}$ ochiq to‘plamlar K ni qoplaydi. K kompakt bo‘lgani uchun undan chekli $U_{\alpha 1}, \ldots . U_{\alpha n}$ qismqoplama ajratish mumkin. Natijada $\{U_{\alpha 0}, U_{\alpha 1}, \ldots . U_{\alpha n}\}$ oila X^* ning chekli qismqoplamasi bo‘ladi. Demak, X^* kompakt.

Zichlik: X kompakt bo‘lmagani uchun $\{\infty\}$ bir nuqtali to‘plam τ^* da ochiq emas (aks holda $X = X^* \backslash \{\infty\}$ kompakt bo‘lib qolar edi). Shu sababli ∞ nuqtaning har qanday atrofi X bilan kesishadi, ya’ni $X = X^*$.

Xausdorflik (Zarurligi va yetarliligi): Agar X lokal kompakt Xausdorf fazo bo‘lsa, X ning ikkita turli X, Y nuqtalarini τ topologiyada ajratish mumkin. $x \in X \; va \; \infty \in V$ nuqtalarni ajratish uchun esa X ning kompakt atrofi Kni ni olamiz (lokal kompaktlikdan).

U holda K ning ichki qismi $U = Int(K)$ va $V = X^*$ o‘zaro kesishmaydigan ochiq to‘plamlar bo‘lib, $x \in U$ va $\infty \in V$ bajariladi. Demak, X^* Xausdorf fazodir. Teskarisi ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

Kontrmisol (Lokal kompaktlikning ahamiyati): Ratsional sonlar to‘plami Q (odatiy Yevklid topologiyasi bilan) Xausdorf fazo, biroq u lokal kompakt emas (Chunki Q dagi har qanday kompakt to‘plamning ichki qismi bo‘sh). Agar Q ga bir nuqtali kompaktifikatsiya qo‘llanilsa, hosil bo‘lgan Q^* fazo kompakt bo‘ladi, lekin Xausdorf bo‘lmaydi: ∞ nuqta bilan ixtiyoriy $q \in Q$ nuqtani kesishmaydigan ochiq atrof bilan ajratib bo‘lmaydi.

3. Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasi

Bir nuqtali kompaktifikatsiyada X fazodagi barcha uzluksiz funksiyalarni kompakt kengaytmaga uzluksiz davom ettirib bo‘lmaydi (masalan, $\sin x$ funksiyani haqiqiy sonlar to‘g‘ri chizig‘ining bir nuqtali kompaktifikatsiyasiga davom ettirishning iloji yo‘q). Bu muammoni hal qilish uchun 1937-yilda M. Stoyn va E. Chex tomonidan maksimal kompaktifikatsiya qurildi.

3.1-teorema (Stoyn–Chex teoremasi). *Har bir Tixonov fazosi Xuchun shunday kompakt Xausdorf fazo $\beta(x)$va X ni unga gomeomorf joylashtiruvchi c akslantirish mavjudki, $C(x)$ to‘plam $\beta(X)$ da hamma joyda zich bo‘lib, quyidagi universallik xossasi bajariladi: ixtiyoriy K kompakt Xausdorf fazo va har qanday uzluksiz $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to K$ akslantirish uchun uni $\beta(X)$ dan K ga o‘tuvchi yagona uzluksiz akslantirishga davom ettirish mumkin.*

Qurish sxemasi (Tixonov kubiga joylashtirish usuli):

1. X fazodan $[0,1]$ birlik kesmaga o‘tuvchi barcha uzluksiz funksiyalar oilasi F qaraladi.

2. Har bir X nuqtaga Tixonov kubining koordinatalari $f(x)$dan iborat bo‘lgan nuqtasi mos qo‘yiladi.

3. X Tixonov fazosi bo‘lgani uchun ushbu moslik X dan uning obraziga gomeomorfizm bo‘ladi (Joylashtirish lemmasi).

4. Tixonovning ko‘paytma kompaktligi teoremasiga binoan Tixonov kubi kompakt Xausdorf fazodir. Kompakt fazodagi yopiq qismto‘plam ham kompakt bo‘lgani sababli obrazning yopilmasi $\beta(x)$ izlanayotgan Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasini beradi.

Natija: Har qanday chegaralangan uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyani $\beta(x)$ ga yagona tarzda uzluksiz davom ettirish mumkin. Shu sababli chegaralangan uzluksiz funksiyalar halqasi $C^*(x)$ va $C(\beta(x)$ halqalari izomorfdir.

Misol: X = (0, 1) ochiq intervalini qaraylik. Uning Aleksandrov kompaktifikatsiyasi aylanaga gomeomorf (bitta nuqta qo‘shiladi). Ikki uchiga nuqta qo‘shish orqali [0, 1] kesma ko‘rinishidagi kompaktifikatsiya olinadi. Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasi esa juda murakkab tuzilishga ega bo‘lib, $\sin\frac{1}{x}$ kabi cheksiz tebranuvchi funksiyalarning barcha limit nuqtalarini o‘z ichiga oladi.

4. Kompaktifikatsiyalar sinfida qisman tartib va qiyosiy tahlil

Berilgan Tixonov fazosi X ning barcha ekvivalent bo‘lmagan Xausdorf kompaktifikatsiyalari sinfini $K(x)$orqali belgilaylik.

4.1-ta’rif. Agar ikkita Y_1va Y_2 kompaktifikatsiya uchun Y_1dan Y_2 o‘tuvchi, X nuqtalarini o‘z o‘rnida qoldiruvchi uzluksiz syuryektiv akslantirish mavjud bo‘lsa, Y_1 kompaktifikatsiya Y_2 dan katta yoki teng deyiladi va $Y_1 \geq Y_2$ kabi yoziladi.

Ushbu munosabat kompaktifikatsiyalar sinfida qisman tartibni aniqlaydi va quyidagi ikki fundamental xossa o‘rinli:

1. **Maksimal element:** Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasi $\beta(x)$ berilgan Y fazoning barcha kompaktifikatsiyalari ichida **eng katta element** hisoblanadi, ya’ni barcha Y kompaktifikatsiyalar uchun $\beta(x) \geq Y$ bajariladi.

2. **Minimal element:** Agar X lokal kompakt Xausdorf fazo bo‘lsa, bir nuqtali Aleksandrov kompaktifikatsiyasi X^* barcha kompaktifikatsiyalar ichida **eng kichik element** hisoblanadi, ya’ni barcha X kompaktifikatsiyalar uchun $Y \geq X^*$o‘rinli.

Taqqoslash mezoni	Aleksandrov kompaktifikatsiyasi X^*	Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasi $\beta(X)$
Fazo X ga qo‘yiladigan shart	Lokal kompakt Xausdorf fazo	Tixonov fazosi
Qoldiq to‘plam $Y \setminus X$	Yagona nuqta	Odatda ulkan quvvatli to‘plam
$K(X)$ dagi o‘rni	Eng kichik (minimal) kompaktifikatsiya	Eng katta (maksimal) kompaktifikatsiya
Funksiyalarni davom ettirish	Faqat cheksizlikda chekli limiti mavjud funksiyalar	Barcha chegaralangan uzluksiz funksiyalar
Metrizatsiyalanish	Agar X ikkinchi sanoqli bo‘lsa, X^*metrizatsiyalanadi	X kompakt bo‘lmasa, $\beta(x)$metrizatsiyalanmaydi

Xulosa

Mazkur maqolada topologik fazolarni kompaktifikatsiya qilishning asosiy nazariy jihatlari o‘rganilib, quyidagi xulosalarga kelindi:

1. Kompaktifikatsiya jarayoni kompakt bo‘lmagan fazolarga "cheksizlik" nuqtalarini qo‘shish orqali ularni kompakt fazolar sinfiga keltirish va kompaktlikning kuchli teoremalarini qo‘llash imkonini beradi.

2. Lokal kompakt Xausdorf fazolar uchun Aleksandrovning bir nuqtali kompaktifikatsiyasi minimal va geometrik jihatdan eng sodda kengayish bo‘lib, u metrizatsiyalanish kabi qulay xossalarni saqlab qoladi.

3. Tixonov fazolari sinfida Stoyn–Chex kompaktifikatsiyasi barcha chegaralangan uzluksiz funksiyalarni uzluksiz davom ettirish imkonini beruvchi eng katta (universal) kompaktifikatsiya sifatida funksional analiz, banax algebralari va o‘lchovlar nazariyasida muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. A’zamov A. A. Umumiy topologiya asoslari. — Toshkent: Fan, 2012. — 216 b.

2. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

3. Энгелькинг Р. Общая топология / Пер. с англ. М. Я. Антоновского, А. В. Архангельского. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

4. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с.

5. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974. — 424 с.

6. Munkres J. R. Topology. 2nd ed. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. — 537 p.