MORSE NAZARIYASI

Hoshimova Dilobar Ko‘chkarovna

SHDPI Aniq fanlar oliy pedagogika maktabi, Matematika va ta’limda axborot texnologiyasi kafedrasi

Ermurodova Jasmina Shokir qizi

SHDPI Aniq fanlar oliy pedagogika maktabi, “Matematika” 2-bosqich talabasi

E-mail: jasminaermurodova@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial topologiyaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan Morse nazariyasi yoritilgan. Silliq ko‘p xilliklar, funksiyalarning kritik nuqtalari va Morse lemmasi ko‘rib chiqilib, Morse indeksi tushunchasi bayon etilgan. Morse tengsizliklari ko‘p xillikning topologik xossalari, xususan, Betti sonlari va Eyler xarakteristikasi bilan bog‘lanishi ko‘rsatilgan. Nazariyaning qo‘llanilishi sfera, tor va proyektiv fazo misollarida tahlil qilingan. Olingan natijalar ko‘p xilliklarning topologik tuzilishini o‘rganishda Morse nazariyasining samarali vosita ekanini tasdiqlaydi.

Kalit so‘zlar: Morse nazariyasi, Morse funksiyasi, kritik nuqta, Morse lemmasi, Morse indeksi, Morse tengsizliklari, Betti sonlari, Eyler xarakteristikasi, silliq ko‘p xillik.

Аннотация. В данной статье рассматривается одна из важнейших областей дифференциальной топологии, теория Морса. Изложены понятия гладкого многообразия, критических точек функций и лемма Морса, а также раскрыто понятие индекса Морса. Показана связь неравенств Морса с топологическими свойствами многообразия, в частности с числами Бетти и эйлеровой характеристикой. Применение теории проанализировано на примерах сферы, тора и проективного пространства. Полученные результаты подтверждают, что теория Морса является эффективным инструментом изучения топологической структуры многообразий. Ключевые слова: теория Морса, функция Морса, критическая точка, индекс Морса, неравенства Морса, числа Бетти, гладкое многообразие.

Ключевые слова: теория Морса, функция Морса, критическая точка, лемма Морса, индекс Морса, неравенства Морса, числа Бетти, эйлерова характеристика, гладкое многообразие.

Abstract. This article examines Morse theory, one of the most important areas of differential topology. The concepts of smooth manifolds, critical points of functions, and the Morse lemma are considered, and the notion of the Morse index is described. The relationship between the Morse inequalities and the topological properties of a manifold, in particular Betti numbers and the Euler characteristic, is demonstrated. The application of the theory is analyzed using the examples of the sphere, the torus, and projective space. The obtained results confirm that Morse theory is an effective tool for studying the topological structure of manifolds.

Keywords: Morse theory, Morse function, critical point, Morse lemma, Morse index, Morse inequalities, Betti numbers, Euler characteristic, smooth manifold.

Kirish.

Differensial topologiyada ko‘p xilliklarning topologik tuzilishini o‘rganish asosiy masalalardan biridir. Morse nazariyasi bu masalani silliq funksiyalarning kritik nuqtalari orqali hal qilish imkonini beradi. Nazariyaga XX asrning 20–30-yillarida M. Morse asos solgan, keyinchalik S. Smeyl, J. Milnor va R. Bott ishlarida u topologiyaning kuchli vositasiga aylandi. Morse nazariyasi h-kobordizm teoremasi, Bott davriylik teoremasi kabi muhim natijalarni isbotlashda qo‘llanilgan. Maqolaning maqsadi Morse nazariyasining asosiy tushunchalari: Morse funksiyasi, Morse lemmasi, Morse indeksi va Morse tengsizliklarini bayon etish hamda ularni sfera, tor va proyektiv fazo misollarida ko‘rsatishdan iborat. Maqola kirish, uch asosiy bo‘lim va xulosadan iborat.

Tarixiy ma’lumot. Morse nazariyasi amerikalik matematik Marston Morse (1892–1977) nomi bilan bog‘liq. U silliq funksiyaning kritik nuqtalari bilan fazoning topologiyasi orasidagi bog‘lanishni birinchi bo‘lib tizimli o‘rgandi. Bu g‘oya Morsening 1925-yilda e’lon qilingan maqolasida paydo bo‘lgan, unda haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyaning kritik nuqtalari orasidagi munosabatlar, jumladan Morse tengsizliklari keltirilgan . Nazariya uning "Katta masshtabdagi variatsion hisob" (The Calculus of Variations in the Large, 1934) monografiyasida to‘liq rivojlantirildi . Morse bu nazariyani yopiq geodeziklarni o‘rganishda qo‘lladi. Bu yo‘nalishda uning ustozi G. D. Birxgofning minimaks usullari muhim rol o‘ynagan. Geodezik chiziqning indeksi uning qo‘shma nuqtalari soniga teng ekanligini

ko‘rsatuvchi Morse indeks teoremasi ham shu davrda isbotlangan.1930-yillarda L. A. Lyusternik va L. G. Shnirelman ham kritik nuqtalar sonini ko‘p xillikning topologik invariantlari orqali baholash masalasi ustida ishladilar (Lyusternik–Shnirelman kategoriyasi). Morse g‘oyalarining topologik tomonini keyinroq R. Tom (1949) va J. Rib (1952) rivojlantirdi. Rib teoremasiga ko‘ra, yopiq ko‘p xillikda faqat ikkita kritik nuqtaga ega Morse funksiyasi mavjud bo‘lsa, u sferaga gomeomorf bo‘ladi.1950-yillarda R. Bott Morse nazariyasini yangi bosqichga olib chiqdi. U aynigan (nondegenerate) kritik ko‘p xilliklar holini qaradi (Morse–Bott funksiyalari) va klassik Li guruhlarining barqaror gomotopiya guruhlari davriyligini isbotladi (Bott davriylik teoremasi, 1957–1959) .Nazariyaning ayniqsa katta yutug‘i S. Smeyl bilan bog‘liq. Smeyl Morse funksiyalari yordamida ko‘p xilliklarni "dastalar" (handles) ga ajratish usulini yaratdi. Natijada u 1960-yillar boshida Puankare gipotezasini 5 va undan yuqori o‘lchamlarda isbotladi hamda h-kobordizm teoremasini hosil qildi. Bu ishlari uchun 1966-yilda Fields medali bilan taqdirlangan. J. Milnor 1956-yilda Morse funksiyasi g‘oyasidan foydalanib, 7-sferaga gomeomorf, lekin diffeomorf bo‘lmagan ko‘p xilliklarni (ekzotik sferalar) qurdi. 1963-yilda uning "Morse Theory" kitobi nashr etildi , 1965-yilda esa h-kobordizm teoremasi bo‘yicha ma’ruzalari chiqdi . Milnor ham Fields medali sovrindori (1962).1980-yillardan boshlab nazariya fizika bilan bog‘landi. E. Vitten 1982-yilda Morse nazariyasiga supersimmetrik kvant mexanikasi nuqtai nazaridan yangi talqin berdi . Shu g‘oyalar asosida A. Floer simplektik geometriyada Floer gomologiyasini yaratdi. Hozirgi kunda Morse nazariyasi topologiya, geometriya, dinamik tizimlar va topologik ma’lumotlar tahlilida ishlatiladi.

Silliq ko‘p xillik ta’rifi. n o‘lchamli silliq ko‘p xillik M,xaritalar(kartalar),silliq o‘tish funksiyalari. Misollar:sfera S^n,tor T^2,proyektiv fazo RP^n. Silliq funksiya. f: M → R ning silliqligi lokal koordinatalarda aniqlanadi. Aynimagan (nondegenerate) kritik nuqta. det H ≠ 0 bo‘lsa, kritik nuqta aynimagan deyiladi. Morse funksiyasi ta’rifi. Barcha kritik nuqtalari aynimagan bo‘lgan silliq funksiya. Oddiy misol. Sfera S^2 ustida balandlik funksiyasi f(x, y, z) = z: ikkita kritik nuqta (shimoliy va janubiy qutb), ikkalasi aynimagan. Morse lemmasi: Agar funksiya kritik nuqtada birinchi tartibli hosilalari nolga teng va Gessiani aynimagan bo‘lsa, u holda lokal koordinatalarda kvadratik ko‘rinishga keltiriladi. Ko‘rinishi: **f=f(p)-**

$y1^2$-…-yn^2+$y(n+1)^2$+…+ym^2.Bu yerda n soni p kiritik nuqtaning **Morse indeksi** deb ataladi. U Hessian matritsasining manfiy xos qiymatlari soniga teng. Indeksning ma’nosi. Indeks n funksiya p dan qancha yo‘nalishda kamayishini bildiradi: n = 0 lokal minimum, n = n lokal maksimum, oraliq qiymatlar egar nuqtalar. Aynimagan kritik nuqtalar izolyatsiyalangan (ya’ni yakkalangan), kompakt ko‘p xillikda ularning soni chekli.**Misollar.**S^2 da f = z: janubiy qutb indeks 0 (minimum), shimoliy qutb indeks 2 (maksimum).Tik turgan tor T^2 da balandlik funksiyasi: 4 ta kritik nuqta, indekslari 0, 1, 1, 2.

Teorema (Morse tengsizliklari). M-kompakt n o‘lchamli silliq ko‘p xillik, f : M→R - Morse funksiyasi, ck esa indeksi k bo‘lgan kritik nuqtalar soni bo‘lsin. U holda har bir k uchun: ck≥bk tengsizlik o‘rinli , bu yerda: bk = dim Hk(M;F) -M ning k-Betti soni. Bundan tashqari **X(M) =** tenglik bajariladi**.**

$$\sum_k (-1)^k c_k = \sum_k (-1)^k b_k$$

Xulosa

Maqolada Morse nazariyasining asosiy tushunchalari ko‘rib chiqildi. Silliq funksiyaning aynimagan kritik nuqtalari va Morse funksiyasi ta’riflandi. Morse lemmasiga ko‘ra, aynimagan kritik nuqta atrofida funksiya kvadratik ko‘rinishga keltiriladi va Morse indeksi aniqlanadi. Morse tengsizliklari kritik nuqtalar soni bilan ko‘p xillikning Betti sonlari orasidagi bog‘lanishni beradi, Eyler xarakteristikasi esa tanlangan Morse funksiyasiga bog‘liq emasligi ko‘rsatildi. Sfera, tor va proyektiv fazo misollari nazariyaning samaradorligini tasdiqladi. Shunday qilib, Morse nazariyasi ko‘p xilliklarning topologik tuzilishini o‘rganishda kuchli vosita hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1.Milnor J. Morse Theory. Princeton University Press, 1963.
2.Milnor J. Lectures on the h-cobordism theorem. Princeton University Press, 1965.
3.Matsumoto Y. An Introduction to Morse Theory. American Mathematical Society, 2002.
4.Nicolaescu L. An Invitation to Morse Theory. Springer, 2011 (2-nashr).
5.Guillemin V., Pollack A. Differential Topology. Prentice-Hall, 1974.
6.Hirsch M. Differential Topology. Springer, 1976.
7.Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.

8.Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.