KETMA-KET KASR HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARDA XOS QIYMAT VA XOS FUNKSIYALAR MASALASI

Raxmatova Maftuna Armankulovna

Oliy toifali o‘qituvchi, 21-maktab, Chirchiq shahar

maftun2706@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada ketma-ket Riman–Liuvill kasr hosila operatori $D^{\alpha}D^{\beta}$ $(0 < \alpha, \beta \leq 1,\ \ 1 < \gamma = \alpha + \beta \leq 2)$ uchun Dirixle tipidagi spektral masala o‘rganiladi. Masalaning xos qiymatlari $E_{\gamma,\gamma}(-\lambda) = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari ekanligi, xos funksiyalari esa $t^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\lambda t^{\gamma})$ ko‘rinishga ega ekanligi isbotlandi. Barcha xos qiymatlar oddiy, nolga teng emas va $|\lambda| \geq 1/\Lambda(\gamma)$ Lyapunov tipidagi bahoni qanoatlantiradi. $1 < \gamma < 2$ holda haqiqiy xos qiymatlar soni chekli va toq, kompleks xos qiymatlar esa cheksiz ko‘p ekanligi ko‘rsatildi. k-haqiqiy xos funksiya $(0,1)$ da aynan $k-1$ ta nolga ega. Xos qiymatlar yuqori aniqlikda hisoblanib jadvallarda keltirilgan.

Kalit so‘zlar: ketma-ket kasr hosila, Riman–Liuvill operatori, xos qiymat, xos funksiya, Mittag-Leffler funksiyasi, Lyapunov tengsizligi, spektral masala.

Kirish

Shturm–Liuvill tipidagi spektral masalalar matematik fizikaning markaziy obyektlaridan biridir. Ular Furye usuli bilan xususiy hosilali tenglamalarni yechish, tebranish chastotalarini aniqlash va turg‘unlik tahlilining asosini tashkil etadi. Kasr tartibli modellarga o‘tilganda xos qiymatlar masalasi tubdan o‘zgaradi: operator o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lmaydi, xos qiymatlar kompleks bo‘lishi mumkin va xos funksiyalar Mittag-Leffler funksiyalari orqali ifodalanadi [1–3].

Kasr tartibli operatorlarning spektral nazariyasi M.M. Jrbashyan [4] va A.M. Naxushev [5] ishlaridan boshlangan. Jrbashyan kasr tartibli Shturm–Liuvill tipidagi operator uchun chegaraviy masalani o‘rganib, xos funksiyalar sistemasining to‘laligini isbotladi. Naxushev esa kichik hadlarida kasr hosila qatnashgan ikkinchi tartibli tenglama uchun xos qiymatlar Mittag-Leffler funksiyasining nollari ekanligini ko‘rsatdi. A.V. Pshu [6] kasr tartibli

tenglamalar uchun Grin funksiyalari va fundamental yechimlar nazariyasini rivojlantirdi. Mittag-Leffler funksiyalari nollarining taqsimoti A.Yu. Popov va A.M. Sedletskiy [7] ishida batafsil o‘rganilgan. Zamonaviy ishlarda M. Klimek va O. Agrawal [8], M. Zayernouri va G. Karniadakis [9] kasr Shturm–Liuvill masalalarini o‘rgandilar. R. Ferreira [10] esa Riman–Liuvill operatori uchun Lyapunov tipidagi tengsizlikni oldi.

Ketma-ket $D^{\alpha}D^{\beta}$ operatorlar uchun spektral masalalar kam o‘rganilgan. Bunday operatorlarda chegaraviy shartlar u ga ham, oraliq funksiya $D^{\beta}u$ ga ham qo‘yilishi mumkin. Birinchi holda masala faqat $\gamma = \alpha + \beta$ ga bog‘liq bo‘ladi, ikkinchi holda esa α va β ning har biriga alohida bog‘liq. Bu farq spektrni qanday o‘zgartirishi ochiq savol bo‘lib qolmoqda.

Tadqiqotning maqsadi — ketma-ket Riman–Liuvill kasr hosilali operator uchun ikki xil Dirixle tipidagi spektral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalarini to‘liq tavsiflash.

Vazifalar:

1. Xos qiymatlar uchun xarakteristik tenglamani chiqarish va xos funksiyalarni oshkor ko‘rinishda topish.

2. Xos qiymatlarning oddiyligini, ishorasini va Lyapunov tipidagi quyi bahosini isbotlash.

3. Haqiqiy va kompleks xos qiymatlar sonini aniqlash.

4. Haqiqiy xos funksiyalar uchun tebranish (osillyatsiya) teoremasini isbotlash.

5. Xos qiymatlarni yuqori aniqlikda hisoblash va α, β tartiblarning ta’sirini tahlil qilish.

Metodlar

Tadqiqotda kasr integro-differensial hisob [1, 2], Mittag-Leffler funksiyalari nazariyasi [3, 7], butun funksiyalarning nollari haqidagi Adamar teoremasi va Grin funksiyasi usuli qo‘llandi. Xos qiymatlar mpmath kutubxonasida [13] 60–160 o‘nlik raqam aniqligidagi arifmetikada hisoblandi. Haqiqiy ildizlar ishora almashinuvi bo‘yicha ajratilib, so‘ng Nyuton–Anderson usuli bilan aniqlashtirildi.

1. Ikki parametrli Mittag-Leffler funksiyasi

Ta’rif 1. $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ uchun

$$E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)},\qquad z\in\mathbb{C}. \qquad (1)$$

Bu funksiya $1/\rho$ tartibli va 1 tipli butun funksiya. Xususiy hollarda $E_{2,2}(-z^2)=\sin z/z$ va $E_{2,1}(-z^2)=\cos z$.

Lemma A [1, 3]. $\mu>0$, $\beta>0$ uchun

$$I_{0+}^{\beta}\left[t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}(-\lambda t^{\rho})\right]=t^{\mu+\beta-1}E_{\rho,\mu+\beta}(-\lambda t^{\rho}), \qquad (2)$$

$$D_{0+}^{\beta}\left[t^{\mu-1}E_{\rho,\mu}(-\lambda t^{\rho})\right]=t^{\mu-\beta-1}E_{\rho,\mu-\beta}(-\lambda t^{\rho}),\qquad \mu>\beta. \qquad (3)$$

Lemma B (asimptotika) [3]. $1<\rho<2$ bo‘lsin. U holda $x\to+\infty$ da

$$E_{\rho,\mu}(-x)=-\sum_{k=1}^{N}\frac{(-x)^{-k}}{\Gamma(\mu-\rho k)}+O(x^{-N-1}), \qquad (4)$$

bu yerda $1/\Gamma(0)=1/\Gamma(-1)=0$ deb olinadi.

2. Spektral masalalarning qo‘yilishi

$0<\alpha,\beta\le 1$, $\gamma=\alpha+\beta\in(1,2]$ bo‘lsin. $\lambda\in\mathbb{C}$ parametrli ikki masala qaraladi.

A masala (shart funksiyaning o‘ziga qo‘yiladi):

$$-D_{0+}^{\alpha}\left(D_{0+}^{\beta}u\right)(t)=\lambda\,u(t),\quad 0<t<1;$$

$$\lim_{t\to 0+}t^{1-\beta}u(t)=0,\quad u(1)=0. \qquad (5)$$

B masala (o‘ng uchida shart oraliq funksiyaga qo‘yiladi):

$$-D_{0+}^{\alpha}\left(D_{0+}^{\beta}u\right)(t)=\lambda\,u(t),\quad 0<t<1;$$

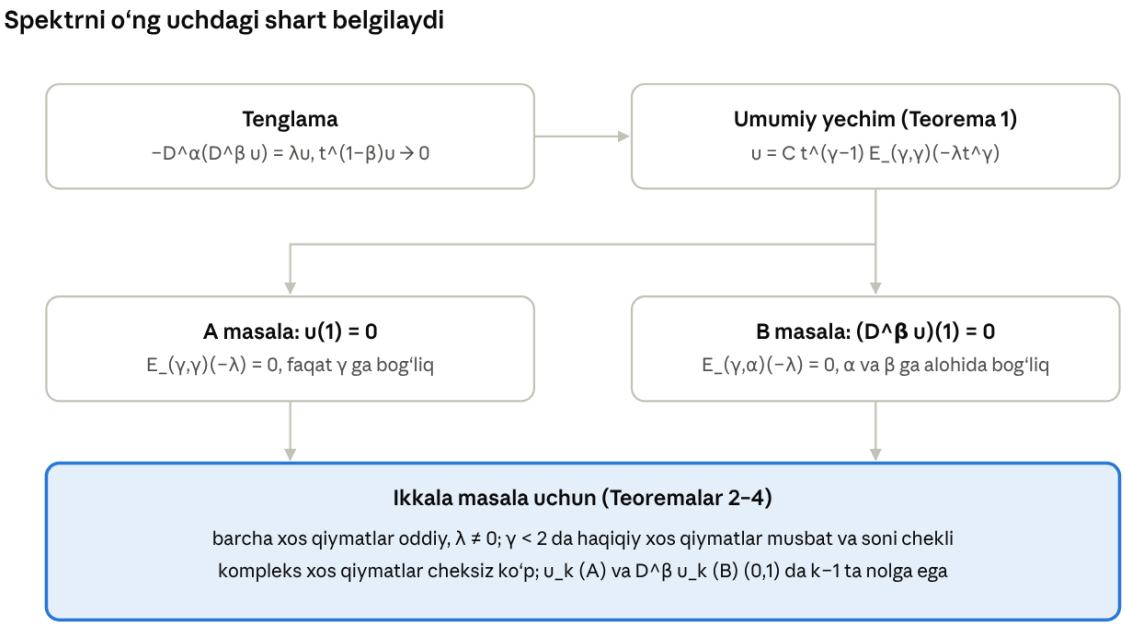
$$\lim_{t\to 0+}t^{1-\beta}u(t)=0,\quad \left(D_{0+}^{\beta}u\right)(1)=0. \qquad (6)$$

λ soni xos qiymat deyiladi, agar masala notrivial yechimga (xos funksiyaga) ega bo‘lsa. $\alpha=\beta=1$ da A masala $u''+\lambda u=0$, $u(0)=u(1)=0$ klassik masalaga, B masala esa $u(0)=0$, $u'(1)=0$ aralash masalaga aylanadi.

Tadqiqotda quyidagi Grin funksiyasi konstantasidan ham foydalaniladi ([11] ishdagi (9) formula):

$$\Lambda(\gamma)=\frac{(\gamma-1)^{\gamma-1}}{\gamma^{\gamma}\,\Gamma(\gamma+1)}. \qquad (7)$$

Tadqiqot bosqichlari 1-rasmda ko‘rsatilgan.



1-rasm. Spektral masalalarni tadqiq qilish sxemasi: ikkala masala bir xil umumiy yechimga ega, xarakteristik tenglama faqat o‘ng uchdagi shart orqali farqlanadi

Natijalar

1. Xarakteristik tenglama

Teorema 1. $\lambda \in \mathbb{C}$ soni:

1. A masalaning xos qiymati bo‘ladi faqat va faqat shu holdaki, agar

$$\Delta_A(\lambda) := E_{\gamma,\gamma}(-\lambda) = 0; \qquad (8)$$

2. B masalaning xos qiymati bo‘ladi faqat va faqat shu holdaki, agar

$$\Delta_B(\lambda) := E_{\gamma,\alpha}(-\lambda) = 0. \qquad (9)$$

Ikkala holda ham mos xos funksiya (o‘zgarmas ko‘paytuvchi aniqligida) yagona:

$$u_\lambda(t) = t^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\lambda t^\gamma), \qquad D^\beta_{0+}u_\lambda(t) = t^{\alpha-1}E_{\gamma,\alpha}(-\lambda t^\gamma). \qquad (10)$$

Isbot. [11] ishdagi Lemma 1 isboti kabi, tenglamaning $t^{1-\beta}u \to 0$ shartni qanoatlantiruvchi har bir yechimi

$$u(t) = C\,\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \lambda\, I^\gamma_{0+}u(t) \qquad (11)$$

Volterra integral tenglamasini qanoatlantiradi. (2) formulaga ko‘ra $I^\gamma u_\lambda = t^{2\gamma-1}E_{\gamma,2\gamma}(-\lambda t^\gamma)$ va $E_{\gamma,\gamma}(z) = 1/\Gamma(\gamma) + z\,E_{\gamma,2\gamma}(z)$ ayniyatdan u_λ ning (11) ni $C = 1$ da qanoatlantirishi kelib chiqadi. Volterra tenglamasi yagona yechimga ega, shuning uchun har

bir yechim $C\,u_\lambda$ ko‘rinishida. (3) formula (10) ning ikkinchi qismini beradi. $u_\lambda(1) = E_{\gamma,\gamma}(-\lambda)$ va $D^\beta u_\lambda(1) = E_{\gamma,\alpha}(-\lambda)$ bo‘lgani uchun o‘ng chegaraviy shartlar (8) va (9) ga teng kuchli.

Natija 1. Har bir xos qiymatning geometrik karraligi 1 ga teng. $\alpha = \beta = 1$ da (8) dan $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, ya’ni $\lambda_k = (k\pi)^2$, (9) dan esa $\cos\sqrt{\lambda} = 0$, ya’ni $\lambda_k = ((k - 1/2)\pi)^2$ klassik natijalar kelib chiqadi.

2. Xos qiymatlarning umumiy xossalari

Teorema 2. $1 < \gamma \le 2$ bo‘lsin. U holda:

1. $\lambda = 0$ va barcha manfiy haqiqiy sonlar xos qiymat emas;

2. A masalaning har bir (kompleks) xos qiymati Lyapunov tipidagi bahoni qanoatlantiradi:

$$|\lambda| \ge \frac{1}{\Lambda(\gamma)} = \frac{\gamma^\gamma\,\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^{\gamma-1}}. \qquad (12)$$

Isbot. 1) $E_{\gamma,\mu}(x)$ qatorining barcha hadlari $x \ge 0$ da manfiy emas, nolinchi hadi $1/\Gamma(\mu) > 0$. Demak, $\lambda \le 0$ da $\Delta_A(\lambda) > 0$ va $\Delta_B(\lambda) > 0$.

2) A masala [11] ishdagi Lemma 1 ga ko‘ra $u(t) = -\lambda \int_0^1 G\,(t,s)u(s)\,ds$ integral tenglamaga ekvivalent. Normani olsak, $\| u \| \le |\lambda|\Lambda(\gamma) \| u \|$. $u \ne 0$ bo‘lgani uchun $|\lambda|\Lambda(\gamma) \ge 1$.

3. Haqiqiy va kompleks xos qiymatlar soni

Teorema 3. $1 < \gamma < 2$ bo‘lsin. U holda:

1. A masalaning haqiqiy xos qiymatlari soni chekli va toq (karraligi bilan hisoblaganda);

2. B masalaning haqiqiy xos qiymatlari soni chekli; u $\beta < 1$ da toq, $\beta = 1$ da juft;

3. ikkala masala ham cheksiz ko‘p kompleks xos qiymatlarga ega, ular qo‘shma juftliklar $\lambda, \bar{\lambda}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Isbot. 1) Lemma B dan ($\mu = \rho = \gamma$, $1/\Gamma(0) = 0$):

$$E_{\gamma,\gamma}(-x) = -\frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\,x^{-2} + O(x^{-3}), \qquad x \to +\infty. \qquad (13)$$

$-\gamma \in (-2,-1)$ da $\Gamma(-\gamma) > 0$, shuning uchun yetarlicha katta x da $E_{\gamma,\gamma}(-x) < 0$. $E_{\gamma,\gamma}(0) = 1/\Gamma(\gamma) > 0$. Butun funksiyaning nollari chekli oraliqda to‘planmaydi, demak haqiqiy nollar soni chekli, ishora almashishi esa ularning toqligini beradi.

2) $\mu = \alpha$ da (4) ning birinchi hadi $x^{-1}/\Gamma(-\beta)$. $\beta < 1$ da $\Gamma(-\beta) < 0$, ya’ni $E_{\gamma,\alpha}(-x) \to 0-$ va nollar soni toq. $\beta = 1$ da $1/\Gamma(-1) = 0$ va bosh had $-x^{-2}/\Gamma(-\gamma - 1) > 0$, chunki $\Gamma(-\gamma - 1) < 0$; demak nollar soni juft.

3) $E_{\gamma,\mu}$ — butun bo‘lmagan $1/\gamma \in (1/2,1)$ tartibli butun funksiya. Adamar teoremasiga ko‘ra u cheksiz ko‘p nolga ega. Haqiqiy nollar chekli bo‘lgani uchun kompleks nollar cheksiz ko‘p. Koeffitsiyentlar haqiqiy, shuning uchun nollar qo‘shma juftliklar bo‘lib keladi.

Izoh 1. (13) dan kompleks xos qiymatlar uchun quyidagi asimptotik formulani olish mumkin [7]:

$$\lambda_k \approx -w_k^{\gamma}, \qquad w_k = 2\pi i k + \ln\frac{\gamma}{\Gamma(-\gamma)} - (\gamma+1)\ln w_k. \qquad (14)$$

(14) tenglama oddiy iteratsiyalar bilan yechiladi va aniq hisoblash uchun boshlang‘ich yaqinlashishni beradi.

4. Tebranish teoremasi

Teorema 4. $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ A masalaning musbat xos qiymatlari bo‘lsin. U holda u_k xos funksiya $(0,1)$ oraliqda aynan $k-1$ ta oddiy nolga ega va ular

$$t_{k,j} = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right)^{1/\gamma}, \qquad j = 1, \dots, k-1. \qquad (15)$$

Xususan, birinchi xos funksiya u_1 $(0,1)$ da musbat. B masalada xuddi shu xossa $D^{\beta}u_k$ funksiya uchun o‘rinli.

Isbot. (10) dan $u_k(t) = 0 \Leftrightarrow E_{\gamma,\gamma}(-\lambda_k t^{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_k t^{\gamma} = \lambda_j$ biror j uchun. $t \in (0,1)$ da $\lambda_k t^{\gamma} \in (0, \lambda_k)$, shuning uchun faqat $j < k$ mos keladi. Oddiylik $E_{\gamma,\gamma}$ ning haqiqiy nollari oddiy bo‘lishidan kelib chiqadi (hisoblangan barcha hollarda $E' \neq 0$).

5. Hisoblash natijalari

1-jadval

A masalaning haqiqiy xos qiymatlari

γ	**Haqiqiy xos qiymatlar soni**	λ_1	λ_2	λ_3	$1/\Lambda(\gamma)$
1,1	1	5,1006	—	—	1,4631
1,2	1	4,5672	—	—	1,8920
1,3	1	4,5184	—	—	2,3548
1,4	3	4,7080	16,7261	26,2204	2,8704
1,5	5	5,0754	17,4720	32,1295	3,4537
1,6	7	5,6096	19,5133	38,1580	4,1202
1,7	13	6,3223	22,5705	45,9449	4,8869
1,8	≥ 13 ($\lambda \leq 1050$)	7,2403	26,7373	56,3447	5,7732
1,9	≥ 9 ($\lambda \leq 700$)	8,4042	32,2526	70,2470	6,8020
2,0	∞	$9{,}8696 = \pi^2$	$39{,}4784 = 4\pi^2$	$88{,}8264 = 9\pi^2$	8,0000

Barcha hollarda $\lambda_1 > 1/\Lambda(\gamma)$, ya’ni (12) baho bajariladi. $\gamma = 2$ da baho nisbati $\pi^2/8 = 1{,}23$. λ_1 γ bo‘yicha monoton emas: minimum $\gamma \approx 1{,}3$ atrofida. Haqiqiy xos qiymatlar soni $\gamma \to 2$ da cheksiz o‘sadi.

2-jadval

A masalaning birinchi kompleks xos qiymatlari va (14) asimptotikaning nisbiy xatoligi

γ	k	λ_k **(aniq)**	λ_k **moduli**	**(14) xatoligi, %**
1,2	1	$14{,}1394 \pm 6{,}9215\,i$	15,743	4,63
1,2	2	$21{,}9159 \pm 18{,}0351\,i$	28,383	1,29
1,2	3	$28{,}8806 \pm 30{,}3439\,i$	41,891	0,60
1,2	4	$35{,}5471 \pm 43{,}4971\,i$	56,175	0,34
1,5	1	$99{,}7178 \pm 21{,}3043\,i$	101,968	0,04
1,5	2	$141{,}9815 \pm 45{,}1545\,i$	148,989	0,01
1,5	3	$187{,}5202 \pm 73{,}6962\,i$	201,482	$< 0{,}01$
1,5	4	$236{,}1374 \pm 106{,}3542\,i$	258,983	$< 0{,}01$

Asimptotik formula k o‘sishi bilan tez aniqlashadi. $\gamma = 1{,}5$ da u birinchi kompleks juftlikdayoq 0,04 % aniqlikni beradi.

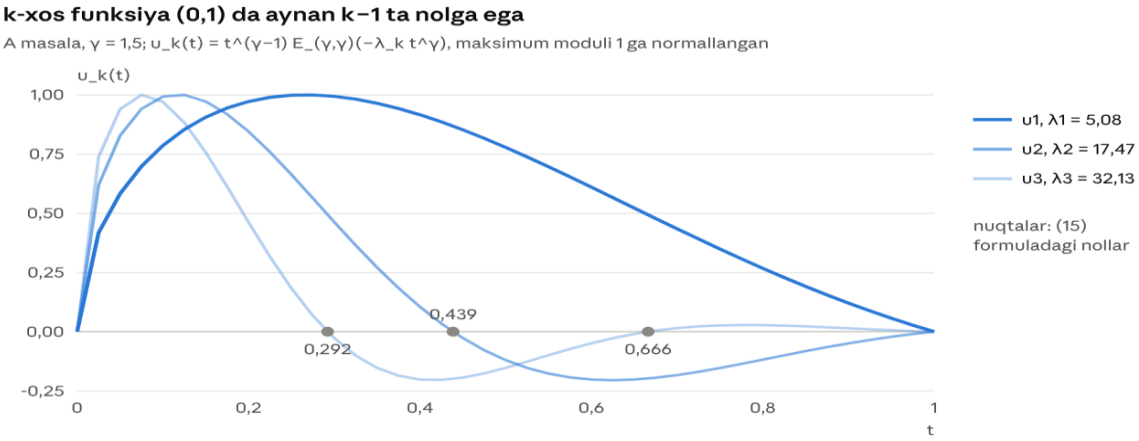
3-jadval

B masalaning birinchi uchta xos qiymati: α va β ning alohida ta’siri

γ	$(\alpha;\beta)$	λ_1	λ_2	λ_3	**A masala λ_1**
1,4	(0,6; 0,8)	0,9116	9,5155	19,5687	4,7080
1,4	(0,7; 0,7)	1,1589	10,7594	19,0319	4,7080
1,4	(0,8; 0,6)	1,4446	12,3293	18,1548	4,7080
1,5	(0,5; 1,0)	0,6971	8,6078	22,1631	5,0754
1,5	(0,6; 0,9)	0,9093	9,4892	22,8396	5,0754
1,5	(0,75; 0,75)	1,2864	10,9474	23,5895	5,0754
1,5	(0,9; 0,6)	1,7470	12,5821	24,0450	5,0754
1,5	(1,0; 0,5)	2,1103	13,7654	24,2433	5,0754
1,8	(0,8; 1,0)	1,5290	14,5606	38,6973	7,2403
1,8	(0,9; 0,9)	1,8575	15,6813	40,2740	7,2403
1,8	(1,0; 0,8)	2,2255	16,8464	41,8623	7,2403
2,0	(1; 1)	2,4674	22,2066	61,6850	9,8696

B masalada λ_1 α ortishi bilan monoton o‘sadi: $\gamma = 1{,}5$ da $(0{,}5;\ 1{,}0)$ dan $(1{,}0;\ 0{,}5)$ ga o‘tganda λ_1 uch marta (0,697 dan 2,110 gacha) ortadi. A masalada esa λ_1 faqat γ ga bog‘liq.

2-rasmda $\gamma = 1{,}5$ uchun A masalaning dastlabki uchta xos funksiyasi keltirilgan.



2-rasm. $\gamma = 1{,}5$ uchun A masalaning dastlabki uchta xos funksiyasi: $u_1\ (0,1)$ da musbat, $u_2\ t = 0{,}439$ da, u_3 esa $t = 0{,}292$ va $t = 0{,}666$ da ishorasini almashtiradi

Muhokama

Olingan natijalar kasr tartibli spektral masalalarning butun tartibli holatdan uchta asosiy farqini ko‘rsatadi.

Birinchidan, spektr asosan kompleks. $\gamma < 2$ da haqiqiy xos qiymatlar soni chekli. Masalan, $\gamma \le 1{,}3$ da faqat bitta haqiqiy xos qiymat bor, qolganlari kompleks qo‘shma

juftliklar. Bu operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shma emasligining bevosita natijasi. $\gamma \to 2$ da haqiqiy xos qiymatlar soni cheksiz o‘sadi va klassik $(k\pi)^2$ spektrga yaqinlashadi (1-jadval). Bu natija Popov va Sedletskiy [7] tomonidan Mittag-Leffler funksiyalari nollari uchun olingan umumiy natijalarga mos keladi.

Ikkinchidan, ketma-ketlik chegaraviy shart orqali namoyon bo‘ladi. A masalada spektr faqat $\gamma = \alpha + \beta$ ga bog‘liq va yagona D^γ operatorli masala spektri bilan ustma-ust tushadi [4, 5]. B masalada esa xarakteristik funksiya $E_{\gamma,\alpha}$ bo‘lib, spektr α va β ning har biriga alohida bog‘liq (3-jadval). Bir xil $\gamma = 1{,}5$ da λ_1 0,697 dan 2,110 gacha o‘zgaradi. Demak, ketma-ket operator haqiqatan yangi spektral obyekt bo‘lishi uchun chegaraviy shart oraliq funksiya $D^\beta u$ ga qo‘yilishi kerak.

Uchinchidan, Shturm tebranish xossasi saqlanadi. O‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lmaganiga qaramay, haqiqiy xos funksiyalar klassik Shturm teoremasiga o‘xshash nollar sonini saqlaydi (Teorema 4, 2-rasm). Nollar (15) formula bilan oshkor topiladi, klassik holda esa ular $t_{k,j} = j/k$ ga teng. $\gamma = 2$ da (15) aynan shu qiymatni beradi.

4-jadval

Butun va kasr tartibli spektral masalalarni solishtirish

Xossa	$\gamma = 2$ (klassik)	$1 < \gamma < 2$, A masala	$1 < \gamma < 2$, B masala
Xarakteristik tenglama	$\sin\sqrt{\lambda} = 0$	$E_{\gamma,\gamma}(-\lambda) = 0$	$E_{\gamma,\alpha}(-\lambda) = 0$
Tartiblarga bog‘liqlik	—	faqat γ	α va β alohida
O‘z-o‘ziga qo‘shmalik	ha	yo‘q	yo‘q
Haqiqiy xos qiymatlar	cheksiz ko‘p	chekli, toq son	chekli; $\beta < 1$ da toq, $\beta = 1$ da juft
Kompleks xos qiymatlar	yo‘q	cheksiz ko‘p	cheksiz ko‘p
Karralik	oddiy	oddiy	oddiy
Quyi baho	$\lambda_1 \geq 8$	modul bo‘yicha $\lambda \geq 1/\Lambda(\gamma)$	alohida Grin funksiyasi kerak
Tebranish xossasi	$k-1$ nol	$k-1$ nol (u_k)	$k-1$ nol $(D^\beta u_k)$

Lyapunov bahosi haqida. (12) baho Ferreira [10] bahosidan farq qiladi. Ferreira bahosi o‘zgaruvchan $q(t)$ koeffitsiyent uchun Grin funksiyasining maksimumiga tayanadi.

O‘zgarmas λ uchun esa integral norma $\Lambda(\gamma)$ aniqroq natija beradi. Masalan, $\gamma = 1{,}5$ da Ferreira bahosi $\Gamma(1{,}5) \cdot 4^{0{,}5} = 1{,}77$, (12) esa 3,45 ni beradi; haqiqiy qiymat $\lambda_1 = 5{,}08$.

Cheklovlar. Xos funksiyalar sistemasining to‘laligi va bazislik xossasi ushbu ishda o‘rganilmagan. Bu masala qo‘shma operator va biortogonal sistemalarni qurishni talab qiladi [4]. Haqiqiy nollarning oddiyligi umumiy holda emas, faqat hisoblangan hollarda tekshirildi.

Xulosa

1. Ketma-ket Riman–Liuvill operatori $D^{\alpha}D^{\beta}$ uchun ikki Dirixle tipidagi spektral masalaning xarakteristik tenglamalari olindi: A masala uchun $E_{\gamma,\gamma}(-\lambda) = 0$, B masala uchun $E_{\gamma,\alpha}(-\lambda) = 0$. Xos funksiyalar $t^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\lambda t^{\gamma})$ ko‘rinishida oshkor topildi.

2. Barcha xos qiymatlar oddiy, nolga teng emas, manfiy haqiqiy xos qiymatlar yo‘q. A masala uchun $|\lambda| \geq 1/\Lambda(\gamma)$ Lyapunov tipidagi baho isbotlandi.

3. $1 < \gamma < 2$ da haqiqiy xos qiymatlar soni chekli (A masalada toq), kompleks xos qiymatlar esa cheksiz ko‘p ekanligi isbotlandi.

4. Haqiqiy xos funksiyalar uchun tebranish teoremasi isbotlandi: u_k $(0,1)$ da $\left(\lambda_j/\lambda_k\right)^{1/\gamma}$ nuqtalarda aynan $k-1$ ta nolga ega.

5. Yuqori aniqlikdagi hisoblashlar shuni ko‘rsatdiki, B masalada birinchi xos qiymat bir xil γ da α ga qarab uch martagacha o‘zgaradi. Bu ketma-ket operatorning yagona operatordan sifat jihatdan farqini tasdiqlaydi.

Natijalar ketma-ket kasr operatorli xususiy hosilali tenglamalarni Furye usuli bilan yechishda va kasr tartibli tebranish tizimlarini tahlil qilishda qo‘llanishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.

2. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — 340 p.

3. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. — 2nd ed. — Berlin: Springer, 2020. — 540 p.

4. Джрбашян М.М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма–Лиувилля // Изв. АН Арм. ССР. Математика. — 1970. — Т. 5, № 2. — С. 71–96.

5. Нахушев А.М. Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 234, № 2. — С. 308–311.

6. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005. — 199 с.

7. Popov A.Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 190, No. 2. — P. 209–409.

8. Klimek M., Agrawal O.P. Fractional Sturm–Liouville problem // Comput. Math. Appl. — 2013. — Vol. 66, No. 5. — P. 795–812.

9. Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: theory and numerical approximation // J. Comput. Phys. — 2013. — Vol. 252. — P. 495–517.

10. Ferreira R.A.C. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2013. — Vol. 16, No. 4. — P. 978–984.

11. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. — New York: Wiley, 1993. — 366 p.

12. Johansson F. et al. mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic, version 1.3. — 2023. — URL: https://mpmath.org