Qabul qilindi: 7-oktabr 2026-yil • Ma’qullandi: 11-oktabr 2026-yil • Nashr qilindi: 19-oktabr 2026-yil

MATEMATIK MODELLASHTIRISH TUSHUNCHASI VA UNING TURLI SOHALARDA QO‘LLANILISH ASOSLARI

Baxtiyorova Farangiz

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Zarafshon fakulteti

Annotatsiya. Maqolada matematik modellashtirish tushunchasi, uning asosiy bosqichlari va model turlari yoritilgan, shuningdek fizika va muhandislik, biologiya va tibbiyot, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari hamda transport sohalarida qo‘llanilish asoslari ko‘rib chiqilgan. Har bir sohadan namunaviy model keltirilib, uning matematik ifodasi va amaliy ahamiyati tushuntirilgan. Navbat nazariyasi misolida modelning nochiziqli xususiyati hisob orqali ko‘rsatilgan. Maqolada matematik modelni to‘g‘ri qo‘llashning asosiy tamoyillari ham umumlashtirilgan.

Kalit so‘zlar: matematik modellashtirish, model, differensial tenglamalar, optimallashtirish, navbat nazariyasi, adekvatlik, sezgirlik tahlili.

Abstract. The article explains the concept of mathematical modeling, its main stages and types of models, and reviews the foundations of its application in physics and engineering, biology and medicine, economics, information technology and transport. A representative model is given for each field, and the nonlinear behaviour of queueing models is illustrated by a numerical example. Basic principles of using mathematical models correctly are summarised.

Keywords: mathematical modeling, model, differential equations, optimization, queueing theory, adequacy, sensitivity analysis.

1. Kirish

Matematik modellashtirish — o‘rganilayotgan obyekt, hodisa yoki jarayonning muhim xususiyatlarini matematik munosabatlar (tenglama, tengsizlik, funksiya, graf, algoritm) orqali ifodalash va shu ifoda asosida tadqiq qilish usulidir [1, 2]. Model real obyektning

aynan nusxasi emas, uning muayyan maqsad uchun soddalashtirilgan ifodasi hisoblanadi: unda masala uchun muhim omillar saqlanadi, ikkinchi darajali omillar esa e’tiborga olinmaydi [3].

Bugungi kunda modellashtirish faqat nazariy tadqiqotlar vositasi emas. Real tajriba qimmat, xavfli yoki umuman mumkin bo‘lmagan hollarda (masalan, epidemiyani yoki ko‘prik konstruksiyasining ortiqcha yuklanishini sinash) hisoblash tajribasi yagona real yo‘l bo‘lib qoladi. Kompyuter texnikasi va hisoblash usullarining rivoji bu yondashuvni deyarli barcha sohalarga olib kirdi [1, 4].

Ishning **maqsadi** — matematik modellashtirish tushunchasini tizimlashtirish va uning turli sohalarda qo‘llanilish asoslarini ochib berishdir. **Vazifalar:** (1) modellashtirish bosqichlari va model turlarini bayon etish; (2) har bir soha uchun namunaviy modelni tahlil qilish; (3) modellarni qo‘llashning umumiy tamoyillarini aniqlash.

2. Tushuncha, bosqichlar va model turlari

Modellashtirish jarayoni odatda quyidagi bosqichlardan iborat bo‘ladi [2, 3]:

1) **Masalani qo‘yish.** Nimani bilish yoki nimani optimallashtirish kerakligi aniqlanadi.

2) **Taxminlar va o‘zgaruvchilarni tanlash.** Qaysi omillar muhimligi, qaysilarini e’tiborsiz qoldirish mumkinligi belgilanadi.

3) **Model tuzish.** Omillar orasidagi bog‘lanish matematik shaklda yoziladi.

4) **Tahlil va yechish.** Model analitik yoki sonli usullar bilan o‘rganiladi.

5) **Tekshirish (validatsiya).** Natijalar real kuzatuvlar bilan solishtiriladi. Mos kelmasa, taxminlar qayta ko‘rib chiqiladi.

6) **Qo‘llash va takomillashtirish.** Model qaror qabul qilishda ishlatiladi va yangi ma’lumotlar asosida yangilanadi.

Bosqichlar ketma-ket, ammo bir martalik emas: ko‘pincha beshinchi bosqich natijasi ikkinchi yoki uchinchi bosqichga qaytishni talab qiladi.

Modellar bir necha asosda tasniflanadi [2, 4]: **deterministik** (natija boshlang‘ich shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi) va **stoxastik** (tasodifiy omillar hisobga olinadi); **statik** (vaqtga bog‘liq emas) va **dinamik** (vaqt bo‘yicha o‘zgaradi); **uzluksiz** (differensial

tenglamalar) va **diskret** (ayirmali tenglamalar, graflar); **chiziqli** va **nochiziqli**. Aynan nochiziqli modellar real hodisalarni aniqroq ifodalaydi, lekin ularni tahlil qilish murakkabroq.

3. Modellashtirishning sohalardagi qo‘llanilishi

3.1. Fizika va muhandislik

Modellashtirish eng avval fizikada shakllangan. Jism haroratining muhit haroratiga intilishi Nyutonning sovish qonuni bilan ifodalanadi:

$$dT/dt = -k \cdot (T - T_m)$$

bu yerda T — jism harorati, T_m — muhit harorati, k — issiqlik almashinuv koeffitsiyenti. Harorat jism bo‘ylab notekis taqsimlansa, J. Fur’e (1822) taklif etgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi qo‘llanadi [8]:

$$\partial u/\partial t = a^2 \cdot \partial^2 u/\partial x^2$$

Bunday modellar bino va konstruksiyalarning issiqlik izolyatsiyasini hisoblash, dvigatellarni sovitish tizimlarini loyihalash va materiallarni qayta ishlash jarayonlarini boshqarishda ishlatiladi.

3.2. Biologiya, tibbiyot va ekologiya

T. Maltus (1798) populyatsiya o‘sishini dN/dt = rN ko‘rinishida, ya’ni cheklanmagan eksponensial o‘sish sifatida ifodalagan. P. Verxulst (1838) resurslar cheklanganini hisobga olib, logistik modelni taklif etdi [5]:

$$dN/dt = r \cdot N \cdot (1 - N / K)$$

bu yerda K — muhit sig‘imi. N kichik bo‘lganda o‘sish eksponensial, N → K da esa to‘xtaydi, ya’ni N = K barqaror muvozanat nuqtasi hisoblanadi. Tibbiyotda kasalliklar tarqalishining SIR modeli ham differensial tenglamalarga asoslanadi: aholi moyil, kasallangan va tuzalgan guruhlarga bo‘linadi, kasallanish cho‘qqisini va emlash ta’sirini oldindan baholash mumkin bo‘ladi [5, 9]. Ekologiyada shunga o‘xshash modellar tur sonining o‘zgarishi va resurslardan foydalanish chegaralarini aniqlashda qo‘llanadi.

3.3. Iqtisodiyot va boshqaruv

V. Leontev tarmoqlararo balans modelida iqtisodiyotning har bir tarmog‘i boshqa tarmoqlar mahsulotiga ehtiyoj sezishi matritsa ko‘rinishida ifodalanadi [6]:

$$x = A \cdot x + y, \text{ ya’ni } x = (E - A)^{-1} \cdot y$$

bu yerda x — tarmoqlar yalpi mahsuloti vektori, A — to‘g‘ridan-to‘g‘ri xarajatlar matritsasi, y — yakuniy iste’mol vektori. Model yakuniy talab o‘zgarganda har bir tarmoq ishlab chiqarishi qanchaga o‘zgarishi kerakligini hisoblashga imkon beradi. Resurslarni taqsimlash masalalarida L. Kantorovich va J. Dantsig asoslagan chiziqli dasturlash qo‘llanadi: cheklovlar $Ax \le b$, $x \ge 0$ bo‘lganda maqsad funksiyasi $c \cdot x$ ning eng katta (yoki eng kichik) qiymati topiladi [7]. Bu usul ishlab chiqarish rejasini tuzish, yuk tashish va portfelni boshqarish kabi masalalarda keng ishlatiladi.

3.4. Axborot texnologiyalari va aloqa

Serverlar, aloqa tarmoqlari va xizmat ko‘rsatish tizimlarida so‘rovlar navbatga turadi. Navbat nazariyasi A. Erlang tomonidan telefon markazlari uchun boshlangan va bugun kompyuter tarmoqlari va ma’lumotlar markazlarini tahlil qilishda qo‘llanadi [10]. Eng sodda M/M/1 modelida so‘rovlar oqimi intensivligi λ, xizmat ko‘rsatish tezligi μ bo‘lsa, tizim yuklamasi $\rho = \lambda/\mu$, tizimdagi so‘rovlarning o‘rtacha soni va o‘rtacha kutish vaqti quyidagicha topiladi:

$$L = \rho / (1 - \rho), \; W = 1 / (\mu - \lambda)$$

Misol: minutiga $\lambda = 8$ ta so‘rov kelib, server $\mu = 10$ ta so‘rovga xizmat ko‘rsatsa, $\rho = 0{,}8$, $L = 4$, $W = 0{,}5$ daqiqa bo‘ladi. Server tezligi 20 foizga oshirilib $\mu = 12$ qilinsa, $\rho \approx 0{,}67$, $L = 2$, $W = 0{,}25$ daqiqa — ya’ni kutish vaqti ikki barobar kamayadi. Bu modelning nochiziqliligini ko‘rsatadi: yuklama 1 ga yaqinlashganda server tezligining kichik ortishi ham kutishni keskin qisqartiradi. Sun’iy intellekt sohasida mashinaviy o‘qitish modellari ham matematik modellardir: parametrlar θ xatolik funksiyasini minimallashtirish orqali topiladi, masalan, o‘rtacha kvadratik xato $(1/n) \cdot \Sigma (y_i - f(x_i; \theta))^2$ minimallashtiriladi. Shu sababli modelni noto‘g‘ri tanlash yoki o‘quv ma’lumotlariga haddan tashqari moslashtirish (overfitting) natijani buzishi mumkin.

3.5. Transport, logistika va boshqa sohalar

Yo‘l tarmog‘i graf sifatida modellashtiriladi: uchlar — chorrahalar, qirralar — yo‘l bo‘laklari, qirra og‘irligi esa masofa yoki vaqt. E. Deykstra (1959) algoritmi bunday grafda eng qisqa yo‘lni topadi va navigatsiya hamda yetkazib berish marshrutlarini rejalashtirishda

asos bo‘ladi [11]. Ekologiya va ijtimoiy sohalarda ham (suv resurslarini boshqarish, aholi sonining o‘zgarishi, ta’lim tizimidagi oqimlarni rejalashtirish) shu kabi modellar ishlatiladi. Sohalar bo‘yicha qiyosiy ma’lumotlar 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval. Matematik modellashtirishning sohalardagi qo‘llanilishi

Soha	Namunaviy model	Matematik apparat	Amaliy maqsad
Fizika va muhandislik	Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, Nyutonning sovish qonuni	Oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar	Haroratni va konstruksiyalar holatini bashorat qilish
Biologiya va tibbiyot	Logistik o‘sish modeli, SIR modeli	Oddiy differensial tenglamalar	Populyatsiya va epidemiya dinamikasini baholash
Iqtisodiyot va boshqaruv	Leontev balans modeli, chiziqli dasturlash	Matritsalar, optimallashtirish usullari	Tarmoqlararo bog‘liqlikni tahlil qilish, resurslarni taqsimlash
Axborot texnologiyalari va aloqa	Navbat modeli, mashinaviy o‘qitish modellari	Ehtimollar nazariyasi, optimallashtirish	Tizim yuklamasi va xizmat sifatini baholash
Transport va logistika	Graf modeli, Deykstra algoritmi	Graflar nazariyasi	Eng qisqa yo‘lni topish, marshrutni rejalashtirish

4. Modellashtirishni qo‘llash asoslari

Modelning foydali bo‘lishi uning murakkabligiga emas, masalaga mosligiga bog‘liq. Amaliyotda quyidagi tamoyillar saqlanishi kerak [2, 3]:

1) **Maqsadga muvofiqlik va soddalik.** Model qo‘yilgan masalani yechish uchun yetarli bo‘lishi, ortiqcha murakkablashtirilmasligi lozim.

2) **Adekvatlik.** Model natijalari real kuzatuvlarga mos kelishi tekshirilishi kerak. Tekshirilmagan model ishonchli qaror asosi bo‘la olmaydi.

3) **Ma’lumot sifati.** Parametrlar real o‘lchovlardan baholanadi. Noto‘g‘ri yoki yetarli bo‘lmagan ma’lumot eng yaxshi modelni ham yaroqsiz qiladi.

4) **Sezgirlik tahlili.** Parametr biroz o‘zgarganda natija qanchalik o‘zgarishi o‘rganiladi. Natija kichik o‘zgarishga juda sezgir bo‘lsa, unga ehtiyotkorlik bilan yondashish kerak.

5) **Taxminlar va chegaralarni ochiq ko‘rsatish.** Model qaysi sharoitda ishlashi va qayerda ishlamasligi aytilishi lozim. Model ma’lumotlar oralig‘idan tashqarida (ekstrapolyatsiya) ishonchli bo‘lmasligi mumkin.

6) **Natijani to‘g‘ri talqin qilish.** Model bashorat emas, ssenariylarni qiyoslash va

qaror qabul qilishni qo‘llab-quvvatlash vositasi bo‘lib xizmat qiladi.

Xulosa

Matematik modellashtirish real hodisani tahlil qilish, bashorat qilish va boshqarish uchun universal vositadir. Maqolada uning bosqichlari, model turlari va fizika, biologiya, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari hamda transport sohalaridagi namunaviy qo‘llanilishi ko‘rib chiqildi. Navbat modeli misoli modellar yordamida oddiy sezgi bilan topib bo‘lmaydigan natijalarga (yuklama yuqori bo‘lganda tezlikning kichik ortishi ham kutishni keskin kamaytirishi) erishish mumkinligini ko‘rsatdi. Modelni muvaffaqiyatli qo‘llash maqsadga muvofiqlik, adekvatlik, ma’lumot sifati, sezgirlik tahlili va chegaralarni ochiq e’tirof etishga bog‘liq. Kelgusi tadqiqotlarda ko‘rib chiqilgan modellarni real ma’lumotlar asosida sinash va dasturiy vositalar yordamida hisoblash tajribasini o‘tkazish maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд. М.: Физматлит, 2001.

2. Giordano F.R., Fox W.P., Horton S.B. A First Course in Mathematical Modeling. 5th ed. Boston: Cengage Learning, 2014.

3. Bender E.A. An Introduction to Mathematical Modeling. New York: Dover Publications, 2000.

4. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. Boulder: Westview Press, 2015.

5. Murray J.D. Mathematical Biology I: An Introduction. 3rd ed. New York: Springer, 2002.

6. Leontief W. Input-Output Economics. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1986.

7. Taha H.A. Operations Research: An Introduction. 10th ed. Harlow: Pearson, 2017.

8. Incropera F.P., DeWitt D.P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 6th ed. New York: Wiley, 2007.

9. Kermack W.O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of

epidemics // Proceedings of the Royal Society A, 1927, 115(772), pp. 700–721.

10. Gross D., Shortle J.F., Thompson J.M., Harris C.M. Fundamentals of Queueing Theory. 4th ed. Hoboken: Wiley, 2008.

11. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to Algorithms. 3rd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2009.

